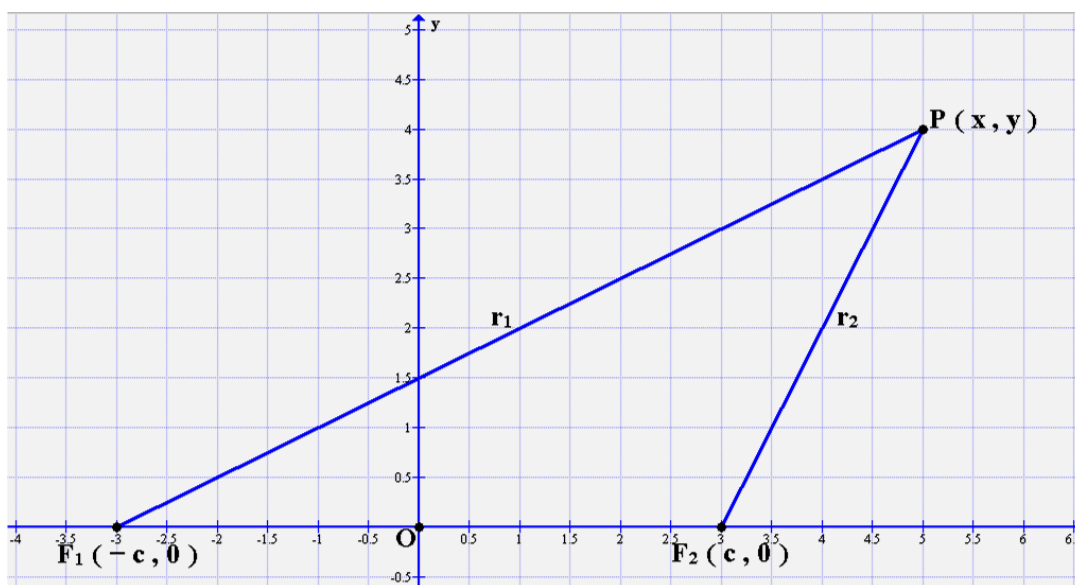


Négy nevezetes mértani helyről – másképpen

Az alábbiakban tárgyalandó ***g*** síkgörbék közös jellemzője, hogy van egy olyan definíció -
juk – a *fókuszos definíció* –, mely nagyrészt közös. Ez így fest:

A ***g*** azoknak a pontoknak a mértani helye a síkon, amelyeknek ***két*** adott ponttól
(a fókusz - vagy gyújtópontoktól) való távolságainak ***m*** - e állandó. Itt ***m***: egy matema -
tikai művelet. Az alábbiakban is jelentősen támaszkodunk az ismert [1], [2], [3] tan -
és segédkönyvekre.

A közös tárgyalás egy közös koordináta - rendszert alkalmaz, melyben a két fókuszpont
– ***F*₁** és ***F*₂** – az ***x*** tengelyen helyezkednek el, az ***y*** tengelyre szimmetrikusan. Centrálisan
szimmetrikus görbéknél előnyös választás ez – 1. ábra.



1. ábra

Ezzel:

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad c > 0. \quad (1)$$

***g*₁: ellipszis**

A definíció képlettel:

$$r_1 + r_2 = 2 \cdot a = konst, \quad a > c > 0. \quad (2)$$

Most (1) és (2) - vel:

$$\boxed{\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2 \cdot a.} \quad (3)$$

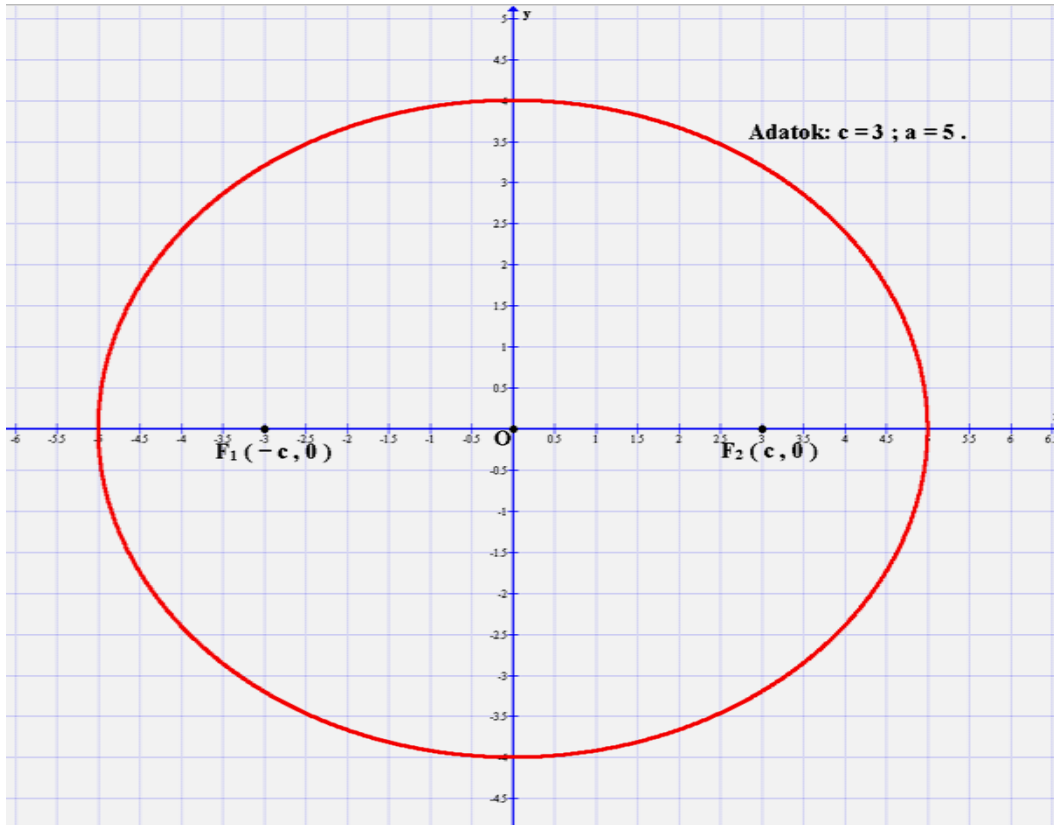
Adatok az ábrázoláshoz, hosszegységben mérve:

$$a = 5, c = 3. \quad (A1)$$

Majd (3) és (A1) szerint:

$$\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10. \quad (F1)$$

Az (F1) implicit függvény grafikonját a 2. ábra mutatja.



2. ábra

g2: hiperbola

A definíció képlettel:

$$r_1 - r_2 = \pm 2 \cdot a \rightarrow |r_1 - r_2| = 2 \cdot a = konst. , c > a > 0. \quad (4)$$

Most (1) és (4) - gyel:

$$\boxed{|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2 \cdot a.} \quad (5)$$

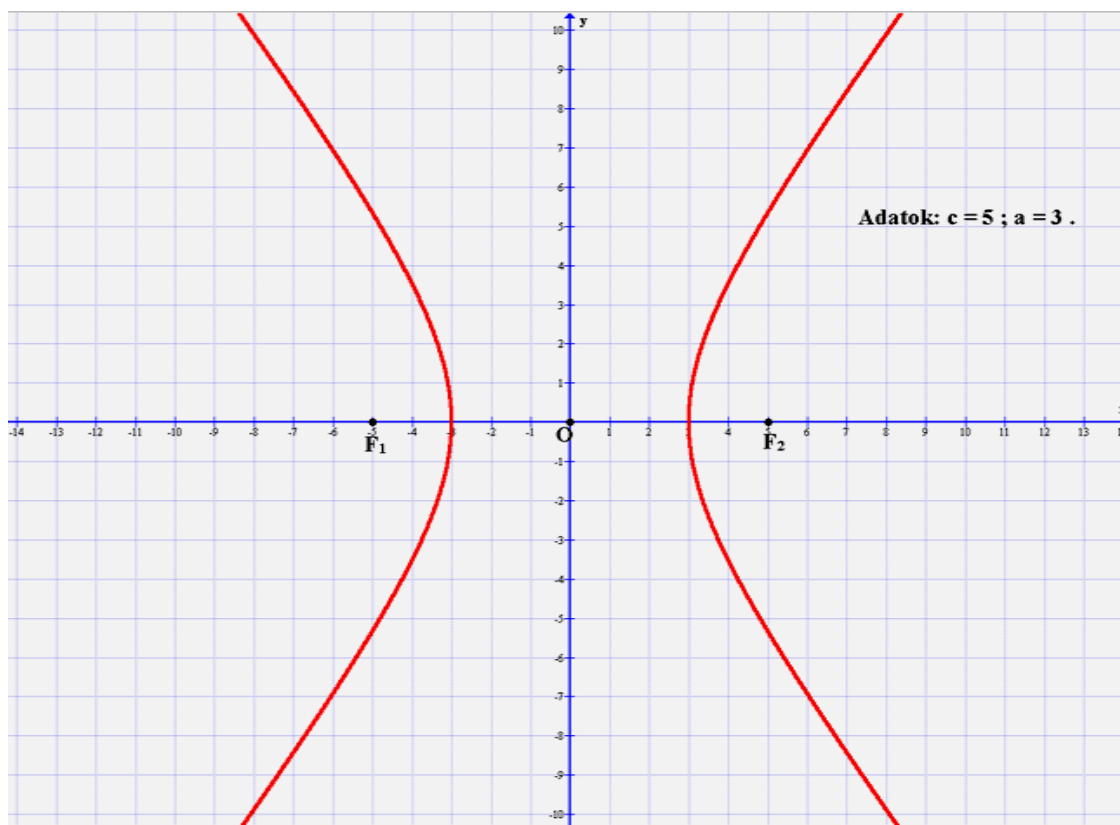
Adatok az ábrázoláshoz, hosszegységben mérve:

$$a = 3, c = 5. \quad (A2)$$

Majd (5) és (A2) szerint:

$$\left| \sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \right| = 6. \quad (\text{F2})$$

Az (F2) implicit függvény grafikonját a 3. ábra mutatja.



3. ábra

g3: Cassini - féle görbe (ovális)

A definíció képlettel:

$$r_1 \cdot r_2 = a^2 = \text{konst.}, \quad a > 0. \quad (6)$$

Most (1) és (6) - tal:

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2.} \quad (7)$$

Adatok az ábrázoláshoz, hosszegységben mérve:

$$a_1 = 6, \quad c_1 = 3; \quad (\text{A3} / 1)$$

$$a_2 = 4, \quad c_2 = 3; \quad (\text{A3} / 2)$$

$$a_3 = 3, \quad c_3 = 3; \quad (\text{A3} / 3)$$

$$a_4 = 2, \quad c_4 = 3; \quad (\text{A3} / 4)$$

Majd (7) és (A3) - mal:

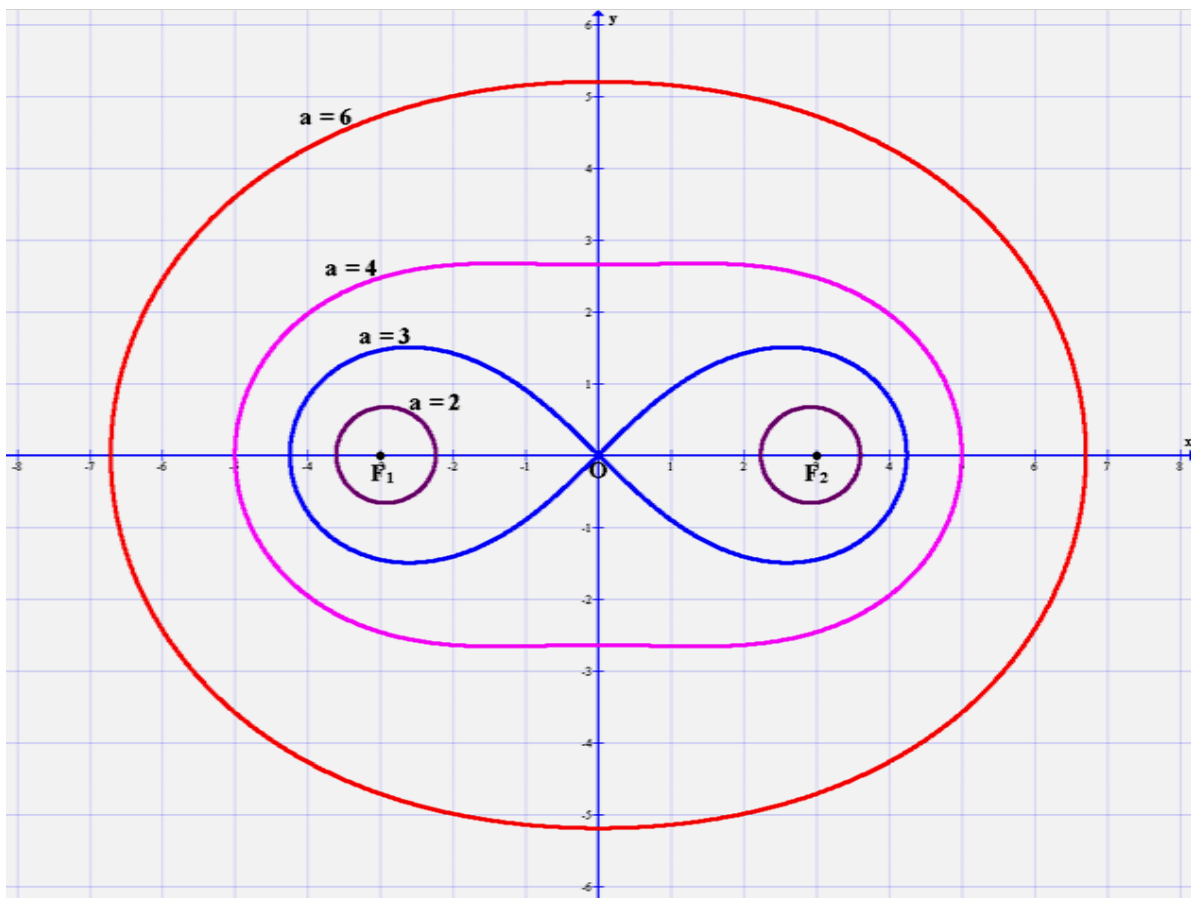
$$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 36; \quad (\text{F3 / 1})$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 16; \quad (\text{F3 / 2})$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 9; \quad (\text{F3 / 3})$$

$$\sqrt{(x+3)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-3)^2+y^2} = 4. \quad (\text{F3 / 4})$$

Az (F3) implicit függvények grafikonjait a 4. ábra mutatja.



4. ábra

g4: Apollóniusz - féle kör

A definíció képlettel:

$$\frac{r_1}{r_2} = k = \text{konst.}, \quad k > 0 \quad (8)$$

Most (1) és (8) - cal:

$$\boxed{\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} = k.} \quad (9)$$

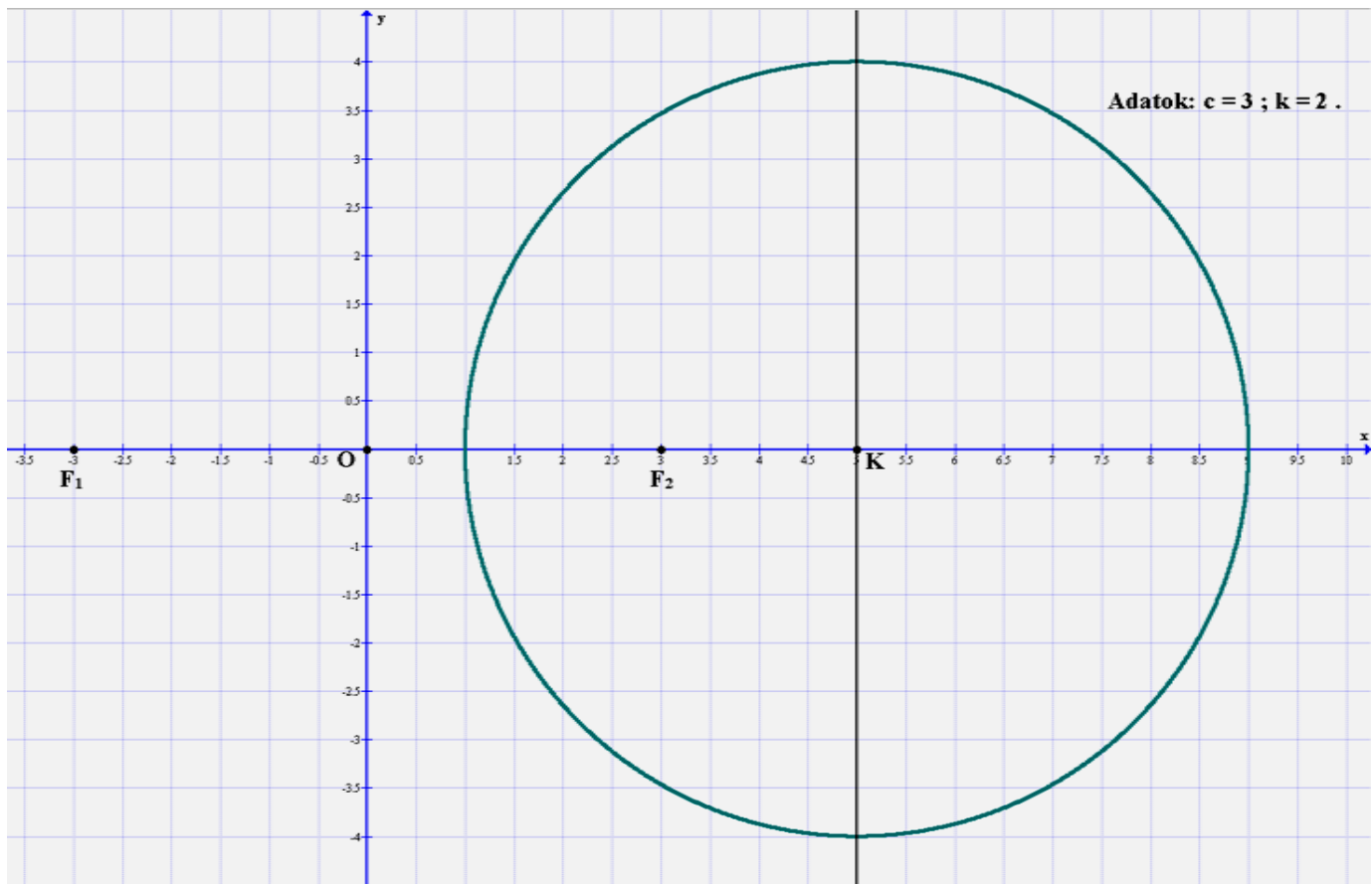
Adatok az ábrázoláshoz:

$$c = 3 \text{ (h.e.)}, k = 2. \quad (\text{A4})$$

Majd (9) és (A4) - gyel:

$$\sqrt{\frac{(x+3)^2+y^2}{(x-3)^2+y^2}} = 2. \quad (\text{F4})$$

Az (F4) implicit függvény grafikonját az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Megjegyzések:

M1. Látjuk, hogy csak a mértani helyes definíció alapján dolgozva is rögtön eredményre jutunk az implicit függvényekben szereplő paraméterek felvételével, valamint egy ilyen függvény ábrázolására alkalmas programmal. Meglehető, további információkhoz nemigen jutunk, azonban „megússzuk” a rengeteg előzetes számítást, mely elvezet az illető görbe függvényének valamely értelemben „kívánatos” alakjához. Véleményünk szerint ennek kedvező hatásai lehetnek a Matematika / Koordinátageometria tanítására / tanulására is.

M2. Meglepő, de a legkevesebb információval az Apollóniusz - féle körrel kapcsolatban rendelkezünk. Mintha ez „mostohagyerek” lenne: [1] és [2] - ben nem foglalkoznak vele, [3] - ban szerencsére igen. Utóbbi művet ajánljuk az érdeklődő Olvasó figyelmébe.

M3. Úgy találjuk, az utóbbi idők „nagy felfedezése” – részünkről – az, hogy az implicit függvényekkel kapcsolatos meglehetősen bonyolult számítások megspórolhatók egy jó rajzoló programmal. Évek óta érlelődött ez, most megfogalmaztuk. Olyan ez, mintha egy másik világra nyitnánk ajtót, két és háromváltozós függvényeknél is:

~ kétváltozós esetben: $f(x, y) = 0$,

~ háromváltozós esetben: $F(x, y, z) = 0$

alakú függvényekkel dolgozva. Szerencsére mindkét esetre találtunk ingyen hozzáférhető, önállóan is kitanulható, internetes eredetű, implicit függvényeket (is) ábrázoló programokat. Erősen ajánlott ilyenek begyűjtése!

M4. Furcsa, de nemigen találkoztunk még az ittenihez hasonló írással. Mintha „büdös” – értsd: nem szalonképes – megoldáshoz nyúltunk volna. Hosszú fejtegetésünk lényege, hogy ez nem igaz. Ahogyan számítógép nélküli korban születünk és bele kellett tanulnunk valamelyest a gép használatába – változtatva világképünkön és hozzáállásunkon – , úgy változhat meg a „hivatalos álláspont” is e témakörben, a régebbihez képest. Persze, lehet, hogy nyitott kapukat döngetünk...

M5. Az Apollóniusz - féle kör egyenlete (9) - ből nyerhető; a [3] nyomán haladó számítás után azt kapjuk, hogy:

~ a kör középpontjának koordinátái: $x_0 = c \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1}$, $k \neq 1$; $y_0 = 0$; (10 / 1)

~ a kör sugara: $R = \left| \frac{2 \cdot c \cdot k}{k^2-1} \right|$, $k \neq 1$. (10 / 2)

Most (10) és (A4) - gyel, a **h. e. = hosszegység** rövidítéssel:

$x_0 = 3 \text{ (h. e.)} \cdot \frac{2^2+1}{2^2-1} = 3 \text{ (h. e.)} \cdot \frac{5}{3} = 5 \text{ (h. e.)}$, $y_0 = 0 \text{ (h. e.)}$; (e1)

$R = \left| \frac{2 \cdot c \cdot k}{k^2-1} \right| = \frac{2 \cdot 3 \text{ (h. e.)} \cdot 2}{2^2-1} = \frac{2 \cdot 3 \text{ (h. e.)} \cdot 2}{3} = 4 \text{ (h. e.)}$, (e2)

egyezésben az 5. ábráról leolvasható adatokkal.

Megemlítjük, hogy az eddig kizárt $k = 1$ speciális eset az F_1F_2 szakasz felező merőlegesét jelenti, ami az 5. ábrán maga az y tengely; ugyanis ekkor $a PF_1F_2$ ($P = O$ esetében elfajuló) háromszög egyenlő szárú, így az r_1 és r_2 oldalak az F_1F_2 alap - szakasz felező merőlegesének pontjait jelölik ki.

M6. Az ábrákra tekintve azonnal látható, hogy mindegyik centrális szimmetriával bír; ámde amíg **g1**, **g2** és **g3** esetében $C = O$, addig **g4** - nál $C = K$, kivéve a $k = 1$ elfajuló esetet, amikor megint $C = O$.

M7. Szóba hoztuk, hogy akár kezdőknél is működhet az itteni megközelítés; valóban: az (1) képlet felírásához csak a *Pitagorász - tétel*re van szükség, ami mostanság általános iskolai tananyag.

M8. A „nagy geométer”, a görög matematikus *Pergai Apollóniosz* nevét így írják [4] - ben. Azonban [3] Apollóniusz, [1] pedig Apollonius néven említi (egy tétele okán). Mi a [3] szerinti nevet választottuk.

M9. A kúpszeleteknek – ellipszis, parabola, hiperbola, illetve elfajult eseteik – van más, nem csak fókuszos definíciója is – [3]. Ezt csak megemlítjük, vele tovább nem foglalkozunk.

M10. Az itteni témához is jó szívvel ajánljuk az [5] művet, ami egy igazi szépség. Már korábban is többször ajánlottuk. Szerzője egyike lehet a geometriatanítás megújítóinak.

Források:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

[2] – **Obádovics J. Gyula:** Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

[3] – **Reiman István:** Matematika
Typotex Kiadó, Budapest, 2011.

[4] –
http://static.hlt.bme.hu/semantics/external/pages/Pergai_Apoll%C3%B3niosz/hu.wikipedia.org/wiki/Pergai_Apoll%C3%B3niosz.html

[5] – **Georg Glaeser:** Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik
3. Auflage, Springer Spektrum 2014.

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2020. 05. 21.